Economic Bulletin of Senshu University
Vol.44, No.1, 39-59., 2009

生態的不確定性下における森林資源と外部効果*

中島 巖

序

再生可能資源（renewable resource）のひとつとしての森林資源の利用の問題は，最適な継続期間（duration）と回転（rotation）のあり方を扱う資本理論の一環として動的な最適収穫時の決定の問題として議論されてきた。そこでの単純な資本市場均衡のルールは，樹木ないしそれと同一のヴィンテージ（vintage）をもつ樹木群の時間を要素とする自然成長函数の下で，Jevons, von Thunen, I. Fisher の流れをくむ自然成長率と利子率の均等化のそれである。

利子率は，以後の金融償還論者（financial maturity school）と最大持続可能産出論者（maximum sustained yield school）との間の論争に際しても中心的役割を演じ続けた。前者は，ブドー酒の熟成期限問題に発する現在価値の最大化をもって最適収穫期日とする Faustmann ルール（Faustmann rule）を頂く一派であり，後者は，森林の限界自然成長率と平均自然成長率の均等化をもって最適収穫期日とする一派である。（両者の論点の違いについて，例えば，Samuelson [20]，Heaps [8]，Mitra＝Wan, Jr. [14]，Dasgupta [4] 等参照。）

しかるに，森林の成長（率），収穫費用が既存の森林資源蓄積量に依存するところで（例えば，Clark＝Munroe [3]，Berck [2] 参照。），また，森林資源がもたらす様々な外部効果（externalities）が考慮されるところで（最初に取上げた Hartman [7]，Pigou 的租税・補助金政策の妥当性を論じた Berck, *op.cit.*,参照。），資本理論は修正を迫られることになる。

さらに，自由利用（free access）に任された共有財産（common properties）を前例として念頭された過剰利用，枯渇化に懸念が及ぶところで，利用に関する管理，規制のあり方がデザインされる必要が生じ得る。（Vousden [22]，Lusky [11]，さらに，世代重複下での世代間正義を掲げた保守主義的政府の政策デザイン化の例として，Mourmouras [16] 参照。）

ところで，上の最大持続可能産出論者でもある生物・生態学系研究者は，資源蓄積量を生物個体群（biomass）のそれとみなし，その自然成長率が確率的にしか把握し得ないことを主張し，資源

*）筆者は，2009年2月3日放送の NHK 番組「プロフェッショナル─日本の森を救う男あり─すご腕・森の再生人」に啓発された。しかしながら，本稿は，同番組の主張に何ら与するものではない。

成長に関する確率的動学モデルの適用を試みる。(例えば，Tuckwell [21]，Beddington＝May [1]，Reed [19]，Gleit [6]，May＝Beddington＝Horwood＝Shepherd [12]，Ludwig [9]，Ludwig＝Varah [10] 等参照。)

Pindyck [18] は，資源蓄積量に関する不確定性を生態的不確定性（ecological uncertainty）と呼び，資源価格の変動に関する不確定性，すなわち，価格不確定性（price uncertainty）と区別した上で，それぞれの不確定性が資源市場均衡価格，産出量の変動にもたらす効果を分析する嚆矢となった。さらに，Morck＝Schwartz＝Stangeland [15] は，森林資源蓄積量を木材在庫（timber inventories）とみなし，価格不確定性と生態的不確定性が同時に作用するところでの森林資源の評価づけに関する条件付請求権（contingent claims）モデルを提示した。

我々の本稿の目的は，私的管理に委ねられた個体群としての森林資源が外部効果をもたらすところで，価格不確定性と生態的不確定性が作用する各々の場合について，不確定性が外部効果を考慮しない林業生産者からなる木材市場における競争均衡価格の変動にもたらす効果と，外部効果をも考慮する政府の最適伐採政策の下での最善解の均衡価格の変動にもたらす効果を検討することにある。

まず，次節では，いずれの不確定性も作用しない情況の下でしたがう木材市場の均衡価格の変動との対比の中で，価格不確定性がもたらす効果を検討する。次いで，第２節では，生態的不確定性が木材市場の均衡価格にもたらす効果を検討した上で，定常状態均衡（steady-state equilibrium）の性質を検討する。最後に，若干の結論的言及がなされる筈である。

なお，本稿は最終稿ではない。

第１節　価格不確定性

1. 確定性下の動学的均衡

本節では，森林資源が木材市場への木材供給のみならず様々な外部効果をもたらすところで，木材価格が確率過程にしたがう不確定性に影響されるときの林業生産者の木材生産計画のあり方，政府の最適伐採政策のあり方を検討する。

まず，本項では，以下の議論との対比のために，各主体が木材の将来価格に関して確実な情報を共有するところでの林業生産者の生産計画，政府の最適伐採政策のあり方を検討する。

さて，森林資源の生育する林業地が多数の同一の林業生産者の管理の下にあるものとする。このとき，代表的林業者（以下，単に「林家」と呼ぶ。）について以下の議論を展開し得ることになる。林業地は，その成長過程が微分方程式

$$\dot{x}(t)=f(x(t))-q(t) \tag{1}$$

で表わされる個体群（biomass）としての蓄積ストックをもつものとする。ただし，$x(t)$は，蓄積ストック，$q(t)$は森林伐採率，そして，$f(x(t))$はストック量に依存する成長函数（growth funtion）である。

ここで，林業地は，森林資源の扶養限度Xをもつものとすると，成長函数は，開区間（0, X）にお

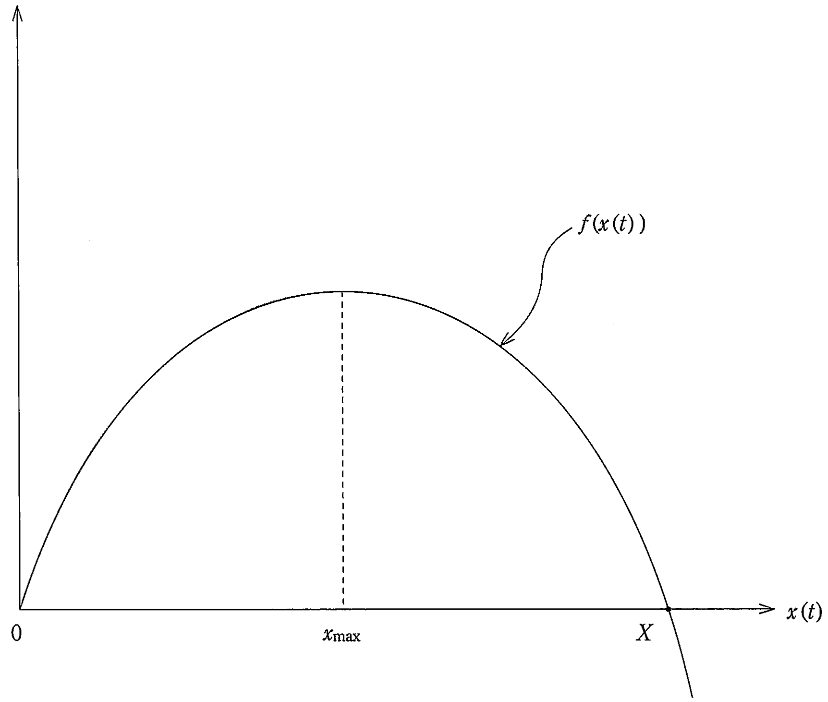

図-1

いてのみ正の値をとり，また，$x_{\max}$ において最大値をとる凹函数となる[1]。(図-1参照。)

ところで，森林資源の果す機能は，木材関連商品の生産機能だけに留まるものではない。加えて，山地炎害の防止，水源の涵養，動植物の保育扶養，温室ガスの吸収，さらにリクリエーションの対象として保健文化サービスの提供などの機能をももつ。こうした機能は，市場を通じて評価されることはなく，外部効果（externalities）を構成する。かかる外部効果の規模は，個体群としての森林蓄積ストック量に依存すると考えられる。

さて，林業地を管理下に置く林家は，上の外部効果に顧慮することはなく，木材の市場価格を所与として，森林の伐倒，集材，造材の過程を経て商品化される木材を市場に販売するか，もしくは，木材伐採をせず森林を保蔵し続けるかの 2 通りの選択の余地をもつ。

いま，森林伐採費用は，伐採率と蓄積ストックに依存し，双一次性（bilinearity）を満たすものとすると，伐採費用は，

$$c(x(t)),\ q(t))=c(x(t))q(t) \tag{2}$$

で表わされる[2]。

木材の将来価格を予知し得る林家は，木材の販売からの利潤の割引現在価値の最大化を図るものとすると，林家の問題は，

$$\max_{q(t)}\int_0^{\infty}[p(t)-c(x(t))]\ q(t)e^{-\delta t}dt$$
$$s.t.\quad \dot{x}(t)=f(x(t))-q(t) \tag{3}$$

で表わされる。ただし，δ は割引率で時間を通じて一定であるものとする。以下，必要時を除いて時間要素の表記を省略する。

直ちに，当該期価値 Hamilton 函数（current value Hamiltonian）

$$H_c=(p-c(x))q+\lambda(f(x)-q) \tag{4}$$

が定義される。ただし，λは，蓄積量１単位に関する割引前のシャドー・プライス（undiscounted shadow price）である。

まず，最適伐採率が満たすべき１階条件

$$(p-c(x))=\lambda \tag{5}$$

がしたがう。次に，森林蓄積ストックに関する動学方程式

$$\dot{\lambda}=(\delta-f'(x))\lambda+c'(x)q \tag{6}$$

がしたがう。さらに，横断面条件

$$\lim_{t\to\infty}(p-c(x))e^{-\delta t}\cdot x=0 \tag{7}$$

が仮定される。

しかるに，(1)式を考慮すれば，(5)式から

$$\dot{\lambda}=\dot{p}-c'(x)(f(x)-q) \tag{8}$$

がしたがうから，(5),(6)式は

$$\dot{p}=(\delta-f'(x))(p-c(x))+c'(x)f(x) \tag{9}$$

$$\text{or}\quad \frac{\dot{p}}{p-c(x)}=(\delta-f'(x))+\frac{c'(x)f(x)}{p-c(x)} \tag{10}$$

を導く。(10)式は，生産者の資産価格形成方程式（asset pricing equation）を与える。

(10)式において，伐採単位費用が一定($c'(x)=0$)であるならば，正味価格上昇率は，市場利子率から成長度を減じた値に等しくなり，さらに，蓄積量が$x_{\max}$よりも大きくなると$f'(x)<0$がしたがうから，蓄積量の規模が大きくなるにつれ価格上昇は加速されることが示唆される。

伐採単位費用が一定でない($c'(x)<0$)とき，正味価格は，$(\delta-f'(x))$よりも$c'(x)f(x)/(p-c(x))$だけ緩かな上昇を示す。後者の値は，蓄積ストック減少化にともなう追加的費用分を補う分に相当する。

ところで，木材市場は競争的であり，そこでの需要曲線が$Q(p)$で表わされるものとする。ただし，$Q'(p)<0$, $\lim_{p\to\infty}Q(p)=0$，かつ，$Q(p)>0$が仮定される。ここで，時点毎に市場の需要が均等化する，すなわち

$$Q(p)=q(t) \tag{11}$$

がしたがうものとする[3)]。

ここで，(11)式を満たす市場均衡の動学をみてみよう。

いま，$\dot{p}=\dot{x}=0$によって定義される定常状態均衡（steady-state equilibrium）(p^*,x^*)を想定する。市場均衡において

$$\dot{x}=f(x)-Q(p) \tag{12}$$

がしたがう。

以上から，$\dot{x}=0$において

$$f(x^*)=Q(p) \tag{13}$$

が，$\dot{p}=0$において

$$(\delta-f'(x))(p^*-c(x))+c'(x)f(x)=0 \tag{14}$$

が，それぞれしたがう。また，(14)式は，$\delta-f'(x)>0$が満たされなければならないことを示唆して

いる。

まず，(13)式から

$$\left.\frac{dp}{dx}\right|_{\dot{x}=0}=\frac{f'(x^*)}{Q'(p)} \tag{15}$$

がしたがい，$x>x_{\max}(x<x_{\max})$に対し，$f'(x)<0\ (f'(x)>0)$がしたがうから，$x-p$ 空間において，$\dot{x}=0$ 曲線は，当初右下りとなり $x=x_{\max}$ で最低点をとり，以後右上りとなる下に凸を成す曲線で表わされる。

次に，(14)式から

$$\left.\frac{dp}{dx}\right|_{\dot{p}=0}=\frac{f''(x)(p^*-c(x))+(\delta-f'(x))c'(x)-c''(x)f(x)-c'(x)f'(x)}{\delta-f'(x)} \tag{16}$$

がしたがう。しかるに，分母は正，分子は，最終項を除きすべて負となる。最終項は，$x>x_{\max}$ に対し負となる。したがって，$\dot{p}=0$ 曲線は，$\delta-f'(x)=0$ を極点とする右下りの曲線で表わされ，$\dot{x}=0$ 曲線の $x>x_{\max}$ なる右上りの部分を上から下に截る。このとき，その交点は，定常状態均衡を与える。(図-**2**参照。)

さて，上の定常状態均衡の安定性をみるために，定常状態均衡(p^*, x^*)の周りに均衡体系((13), (14)式)を線型近似すれば，

$$\begin{aligned}\dot{p}=&(\delta-f'(x^*))(p-p^*)-[(\delta-f'(x^*))c'(x^*)+f''(x^*)(p^*-c(x^*))\\&-c''(x^*)f(x^*)-c'(x^*)f'(x^*)](x-x^*)\end{aligned} \tag{17}$$

$$\dot{x}=-Q'(p^*)(p-p^*)+f'(x^*)(x-x^*) \tag{18}$$

がしたがう。ただし，各係数は，(p^*, x^*)で評価された定数となる。ここで，(17), (18)式の均衡体系を行列表示すれば

$$\begin{bmatrix}\dot{p}\\ \dot{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta-f'(x^*) & \Sigma(p^*, x^*)\\ -Q'(p^*) & f'(x^*)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p-p^*\\ x-x^*\end{bmatrix} \tag{19}$$

を得る。ただし，$\Sigma(p^*, x^*)\equiv-[(\delta-f'(x^*))c'(x^*)+f''(x^*)(p^*-c(x^*))-c''(x^*)f(x^*)-c'(x^*)f'(x^*)]$ (>0)である。

いま，上の行列の係数要素から成る Jacobian 行列を J とし，その特性方程式

$$|\rho I-J|=0 \tag{20}$$

を解く特性根をρ_1, ρ_2とすると，

$$\mathrm{tr}(J)=\rho_1+\rho_2=\delta>0 \tag{21}$$

$$\det(J)=\rho_1\cdot\rho_2=(\delta-f'(x^*))f'(x^*)+Q'(p^*)\Sigma(p^*, x^*)<0 \tag{22}$$

がしたがうから，特性根は反対符号をもつ。このことは，均衡体系が鞍点安定的（saddle-point stable）なそれとなり，(p^*, x^*) に収束するような多様体が存在する。(図-**2**参照。)

上の帰結は，$\dot{p}=0$曲線が上から下に$\dot{x}=0$曲線を $x>x_{\max}$ において截り，その交点が絶対値のタームで前者が後者より大きい傾きをもつ，すなわち，絶対値タームで

$$\frac{\partial\dot{p}}{\partial x}\Big/\frac{\partial\dot{p}}{\partial p}>\frac{\partial\dot{x}}{\partial x}\Big/\frac{\partial\dot{x}}{\partial p} \tag{23}$$

$$\text{or}\quad \frac{\partial\dot{p}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\dot{x}}{\partial p}-\frac{\partial\dot{x}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\dot{p}}{\partial p}<0 \tag{24}$$

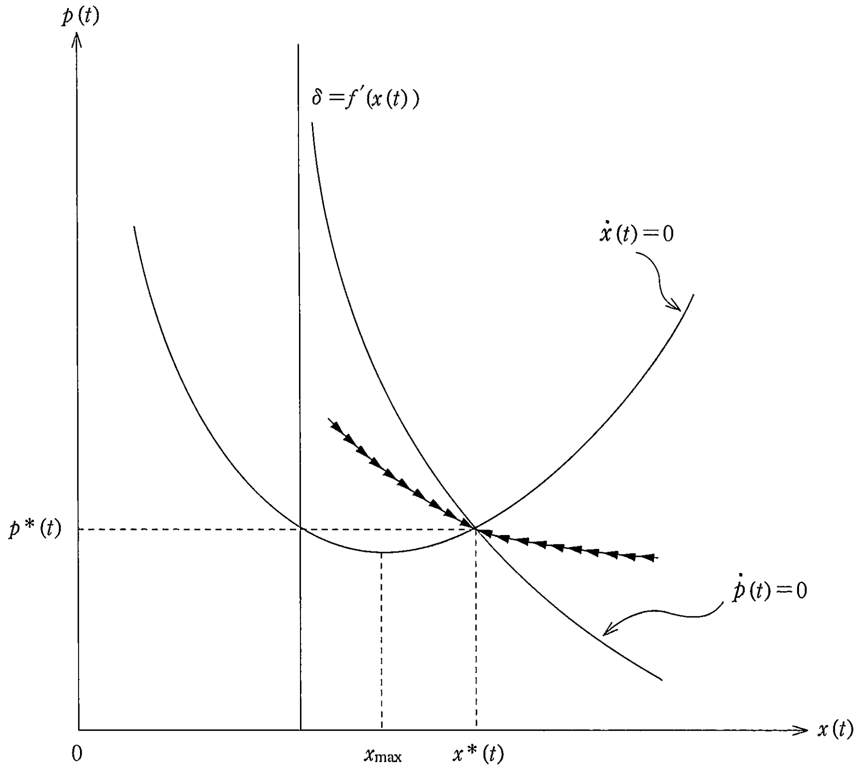

図-2

を満たすことを意味しており，(24)式は，det(J)((22)式)に他ならない。

さて，政府の問題に目を転じよう。

政府が経済に介入する仕方として2通りのそれが考え得る。第1は，民間部門の最適化条件を所与として，社会的厚生の最大化を図るべく他の部門の意思決定を整える次善解（second-best solutions）を求める仕方である。もう1つは，計画経済における計画当局のごとくに，すべての部門の意思決定を社会的厚生を最大化させるべく仕向ける最善解（first-best solutions）を求める仕方である。以下では，後者を想定しよう[4)]。

いま，政府は木材の将来価格について民間の林家同様に正確な予知を下し得るものとする。ここで，政府は，木材消費からの消費者の効用から生産費用を減じ，外部効果を加えた値を社会的厚生(social welfare）とみなし，その最大化を実現させるべく森林伐採政策をとるものとする。したがって，政府の問題は，外部効果 $a(x)$ の下で，

$$\max_{q(t)} \int_0^{\infty} W(t) e^{-\delta t} dt = \int_0^{\infty} [U(q(t)) - c(x(t)) q(t) + a(x(t))] e^{-\delta t} dt$$

$$s.t. \quad \dot{x}(t) = f(x(t)) - q(t) \tag{25}$$

で表わされる。以下，時間要素を省略する。

直ちに，当該期価値 Hamilton 函数

$$H_c = [U(q) - c(x) q + a(x)] + \lambda (f(x) - q) \tag{26}$$

がしたがう。

まず，最適伐採量が満たすべき１階条件

$$U'(q)-c(x)=\lambda \tag{27}$$

がしたがう。しかるに，(27)式を満たすシャドー・プライスλに対し，林家は(5)式を満たすべく行動するから

$$U'(q)=p \tag{28}$$

がしたがわなければならない。

次に，森林蓄積ストックに関する動学方程式

$$\dot{\lambda}=(\delta-f'(x))\lambda+c'(x)q-a'(x) \tag{29}$$

がしたがう。ここで，外部効果は，蓄積ストックの逓減的非減少函数$(a'(x)>0, a''(x)\leq 0)$であるものとする。

さらに，横断面条件

$$\lim_{t\to\infty}(p-c(x))e^{-\delta t}\cdot x=0 \tag{30}$$

が仮定される。

いま，木材需要函数を(27)式から逆函数を用いて$q^D(p)=U'^{-1}(p)$で表わし，さらに，$q^D(p)=Q(p)$と設定し直せば，均衡体系は，

$$\dot{p}=(\delta-f'(x))(p-c(x))+c'(x)f(x)-a'(x) \tag{31}$$

$$\dot{x}=f(x)-Q(p) \tag{32}$$

で表わされる。

しかるに，$\dot{x}=0$曲線は，(32)式から

$$\left.\frac{dp}{dx}\right|_{\dot{x}=0}=\frac{f'(x^*)}{Q'(p)} \tag{33}$$

を導くから，上の(15)式に関する議論がそのまま妥当する。さらに，$\dot{p}=0$曲線は，(31)式から

$$\left.\frac{dp}{dx}\right|_{\dot{p}=0}=\frac{f''(x)(p^*-c(x))+(\delta-f'(x))c'(x)-c''(x)f(x)-c'(x)f'(x)+a'(x)}{\delta-f'(x)} \tag{34}$$

を導く。ここでの$\dot{p}=0$曲線は，(14)式が描く曲線を$a'(x)$だけ上方にシフトさせたものになる。ここで，上の２つの曲線の交点，すなわち$\dot{p}=\dot{x}=0$を満たす組$(\hat{p},\hat{x})$を体系(31), (32)式の最適定常状態(optimal steady-state）と呼んでおこう。$\hat{x}\geq x_{\max}$($\hat{x}<x_{\max}$）ならば，$a'(x)$の増加は，$\dot{p}=0$の曲線のシフト幅を拡大させ，$\hat{p}, \hat{x}$を共に増加（減少）させる。

ところで，上の最適定常状態を競争的市場均衡として実現し得るか否かは伝統的な関心事である。

いま，競争的市場経済において，消費者は，所得制約の下で木材消費からの効用の割引現在価値を最大化するものとすれば，消費者の問題は，

$$\max_q \int_0^\infty U(q)e^{-\delta t}dt$$

$$s.t.\quad pe^{-\delta t}\cdot q=W \tag{35}$$

で表わされる。ただし，Wは，所得額である。

直ちに，最適消費量が満たすべき１階条件

$$U'(q)-\mu p=0 \tag{36}$$

がしたがう。ただし，μは，所得制約に関わる Lagrange 乗数である。$W\to\infty$につれて$\mu\to 0$となり，

逆に，$W \to 0$ につれて $\mu \to \infty$ となるから，$\mu = 1$ を導くような所得水準 W^* が存在し得る。

他方，生産者たる林家は，森林蓄積ストック式の下で利潤と外部効果の和の割引現在価値を最大化するものとすれば，林家の問題は

$$\max_q \int_0^\infty [(p - c(x))q + a(x)]e^{-\delta t}dt$$

$$s.t. \quad \dot{x} = f(x) - q \tag{37}$$

で表わされる。

最適伐採量が満たすべき1階条件と蓄積量に関する動学方程式から

$$\dot{p} = (\delta - f'(x))(p - c(x)) + c'(x)f(x) - a'(x) \tag{38}$$

がしたがう。さらに，市場均衡条件 $q = Q(p)$ を用いれば

$$\dot{x} = f(x) - Q(p) \tag{39}$$

を得る。(38)式の $-a'(x)$ を相殺すべく $a'(x)$ だけの補助金（subsidy）を林家に支給すれば，消費者の所得 W^* の下で最適定常状態((31), (32)式)を実現し得る可能性が指摘される[5]。

2. 価格不確定性

本項では，木材の将来価格に確率過程にしたがう不確定性が作用するところでの林業生産者の木材生産計画，政府の最適伐採政策のあり方を検討する。

森林資源の利用に当たって2通りの不確定性に直面する可能性がある。1つは，伐採され商品化される木材の市場価格の推移に関する不確定性であり，もう1つは，生態的不確定性（ecological uncertainty）と呼ばれるそれである。後者は，森林資源を個体群とみなすとき，その蓄積量の自然成長率が確率的にしか特定し得ない情況を指す。

かかる不確定性が作用するところでは，保蔵される森林資源は正味キャピタル・ゲイン（net capital gain）を生む可能性が生じ，そこでの森林資源は，資産（asset）の側面を帯びてくる。

まず，本項では，木材の将来価格に確率過程にしたがう不確定性が作用する場合を想定し，不確定性が林家の生産計画，政府の最適伐採政策に及ぼす影響を検討する。

いま，木材の市場価格は，時点毎に独立した増分をともなう確率過程にしたがって，その期待成長径路から上下に乖離しながら変動していくものとする。このとき，価格変動は，確率微分方程式

$$dp = \alpha p dt + \sigma_p p dz = \alpha p dt + \sigma_p p \varepsilon_p(t)\sqrt{dt} \tag{40}$$

にしたがうものとする[6]。ただし，α は価格の期待成長率，σ_p は分散要素であり，$\varepsilon_p(t)$ は平均ゼロ，分散1をとる正規分布にしたがう系列無相関な確率変数である。このとき，$dz = \varepsilon_p(t)\sqrt{dt}$ は，Wiener 過程（Wiener process）を成すものとする。定義より，直ちに，$E[dp/p] = \alpha dt$, $\mathrm{Var}[dp/p] = \sigma_p^2 dt$ がしたがう[7]。したがって，(40)式は，現在価格については既知であるが，将来価格については不確定性が時間とともに拡大していき，その変動は連続的に生起することを意味している。

さて，林家は，個体群としての森林資源の外部効果には顧慮することなく，価格変動の過程を予想しながら，自らの木材販売からの利潤流列の割引現在価値の最大化を図るものとする。

このとき，林家の問題は，時間要素を省略すれば

$$\max_{q} E_0 \int_0^{\infty} [p-c(x)]\, q e^{-\delta t} dt$$
$$s.t. \quad \dot{x} = f(x) - q$$
$$dp = \alpha p dt + \sigma_p p dz = \alpha p dt + \sigma_p p \varepsilon_p(t) \sqrt{dt} \tag{41}$$

で表わされる。ただし，E_0は，時点ゼロに利用可能な情報からしたがう予想を表わす期待値オペレータである。

上の問題に対しては確率的動的計画法（stochastic dynamic programming）の適用が可能となる。

ここで，伐採量$q(0)>0$となり，全時間視野を通じて$q(t)>0$となるようなp_0, αが対応しているものと仮定し，

$$\Pi_d = \Pi e^{-\delta t} = [p-c(x)]\, q e^{-\delta t} \tag{42}$$

と設定すれば，最適状態評価函数（optimal value function）

$$J = J(x, p, t) = \max_{q(\tau)} E_t \int_t^{\infty} \Pi_d(\tau) d\tau \tag{43}$$

が定義される。

ここで，動的計画法を適用し，積分を時間間隔Δtで分割すれば，(43)式は

$$\begin{aligned} J(x, p, t) &= \max_{q(\tau)} E_t \int_t^{\infty} \Pi_d(\tau) d\tau \\ &= \max_{q(\tau)} E_t \int_t^{\infty} \Pi_d(\tau) d\tau + \max_{q(\tau)} E_{t+\Delta t} \int_{t+\Delta t}^{\infty} \Pi_d(\tau) d\tau \\ &= \max_{q(\tau)} E_t \left\{ \int_t^{t+\Delta t} \Pi_d(\tau) d\tau + J(x(t+\Delta t), p(t+\Delta t), t+\Delta t) \right\} \\ &= \max_{q(\tau)} \left\{ \Pi_d(\tau) \Delta t + E_t [J(x(t+\Delta t), p(t+\Delta t), t+\Delta t)] \right\} \end{aligned} \tag{44}$$

と変形される。さらに，$E_t[J(x(t+\Delta t), p(t+\Delta t), t+\Delta t) - J(x(t), p(t), t)] = E_t dJ$がしたがうから，(44)式は，さらに，

$$J(x, p, t) = \max_{q(\tau)} [\Pi_d(\tau) \Delta t + J(x, p, t) + E_t dJ] \tag{45}$$

と表現し直される。いま，(45)式の両辺から$J(x, p, t)$を減じ，Δtで除し，$\Delta t \to 0$とすれば，その極限値dtに対し，確率 Bellman 方程式（stochastic Bellman equation）

$$0 = \max_{q(t)} \left\{ \Pi_d(t) + \left(\frac{1}{dt}\right) E_t dJ \right\} \tag{46}$$

がしたがう。

さて，dJに Taylor 展開を施せば

$$dJ = J_t dt + J_p dp + J_x dx + \frac{1}{2} J_{pp} (dp)^2 + \frac{1}{2} J_{xx} (dx)^2 \cdots \tag{47}$$

がしたがう。(47)式の両辺の期待値をとり$(1/dt)$を乗じ，さらに高次項を無視すれば

$$\left(\frac{1}{dt}\right) E_t dJ = J_t + \alpha p J_p + (f(x) - q) J_x + \frac{1}{2} \sigma_p^2 p^2 J_{pp} \tag{48}$$

を得る。これを Bellman 方程式に代入すれば

$$0 = \max_{q(t)} \left\{ \Pi_d(t) + J_t + \alpha p J_p + (f(x) - q) J_x + \frac{1}{2} \sigma_p^2 p^2 J_{pp} \right\} \tag{49}$$

がしたがう。(49)式は，各時点において，伐採量が，すべての割引将来利潤の期待値の変化と当該期利潤とをバランスさせるべく選択されなければならないことを意味している。

ここで，(49)式における $q(t)$ に関する最大化を実行すれば

$$\frac{\partial \Pi_d}{\partial q}=J_x \tag{50}$$

を得る。(50)式は，木材の追加１単位の販売から得られる利潤の増分が森林資源のシャドー・プライスに常に均等化しなければならないことを示唆している。

また，(49)式に包絡面定理（envelope theorem）を適用すれば，

$$\frac{\partial \Pi_d}{\partial x}+J_{tx}+\alpha pJ_{px}+f'(x)J_x+(f(x)-q)J_{xx}+\frac{1}{2}\sigma_p^2p^2J_{ppx}=0 \tag{51}$$

がしたがう。しかるに，伊藤補題の適用から

$$\left(\frac{1}{dt}\right)E_t dJ_x=J_{tx}+\alpha pJ_{px}+f'(x)J_x+(f(x)-q)J_{xx}+\frac{1}{2}\sigma_p^2p^2J_{ppx} \tag{52}$$

がしたがう。J_x を消去すべく $(1/dt)E_t d(\cdot)$ なる演算子を適用すれば[8]，変分法の Euler 方程式に相当する関係

$$\left(\frac{1}{dt}\right)E_t d\left(\frac{\partial \Pi_d}{\partial q}\right)=-\frac{\partial \Pi_d}{\partial x} \tag{53}$$

を得る。(53)式は，森林資源１単位の販売から得られる限界利潤が当該１単位を林業地に保蔵し続けることから得られる割引将来利潤の増加分の期待合計に均等化しなければならないことを示唆している。

ここで，$\partial \Pi_d/\partial q=(p-c(x))e^{-\delta t}$，$\partial \Pi_d/\partial x=-c'(x)qe^{-\delta t}$ を(53)式に代入すれば，

$$\left(\frac{1}{dt}\right)E_t dp-\left(\frac{1}{dt}\right)E_t dc(x)-\delta(p-c(x))=c'(x)q \tag{54}$$

を得る。

いま，伊藤補題を適用し $dc(x)$ を展開すれば

$$dc(x)=c'(x)dx+\frac{1}{2}c''(x)(dx)^2 \tag{55}$$

を得る。(55)式において，$c(x)$ は伐採１単位当たりの限界費用であるが，伐採量 q の水準に影響されない。この事実は，伐採費用の蓄積量と伐採量の間の双一次性の仮定に負っている。さらに，高次項 $(dx)^2$ の期待値はゼロに近似されるから，(55)式は

$$dc(x)=c'(x)dx \tag{56}$$

と簡単化される。いま，(56)式を(54)式に代入すれば，

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{dt}\right)E_t dp&=\delta(p-c(x))+c'(x)f(x)\\&<\delta(p-c'(x))(p-c(x))+c'(x)f(x)=\dot{p}\end{aligned} \tag{57}$$

がしたがう。不等号の右辺は，前項の(9)式からしたがう。(57)式は，木材価格の変動速度が不確定性が作用しない情況より作用する情況における方が小さくなることを示唆している。かかる帰結は，伐採費用の双一次性の仮定に決定的に依存していることに注意されたい。

次に，最善解を目指す政府の問題に目を転じよう。

いま，政府は，消費者の木材消費からの効用と外部効果の和から伐採費用を減じた値，すなわち，消費者余剰と生産者余剰との和に外部効果を加算した値を社会的厚生とみなすものとする。このとき，社会的厚生は

$$V(t)=U(q)-c(x)q+a(x) \tag{58}$$

で表わされる。

ここで，政府が林家と状態評価函数を共有するならば，政府の最適状態評価函数は

$$J=J(x,p,t)=\max_{q(\tau)}E_t\int_t^{\infty}V_d(\tau)d\tau \tag{59}$$

で定義される。ただし，$V_d(t)=[U(q)-c(x)q+a(x)]e^{-\delta t}$である。

上と同様の手続きを適用すれば，Bellman 方程式

$$0=\max_{q(t)}\{V_d(t)+\left(\frac{1}{dt}\right)E_t dJ\} \tag{60}$$

がしたがい，再び，

$$\left(\frac{1}{dt}\right)E_t dJ=J_t+\alpha pJ_p+(f(x)-q)J_x+\frac{1}{2}\sigma_p^2p^2J_{pp} \tag{61}$$

がしたがうから，これを上の Bellman 方程式（(60)式）に代入すれば，

$$0=\max_{q(t)}\left\{V_d(t)+J_t+\alpha pJ_p+(f(x)-q)J_x+\frac{1}{2}\sigma_p^2p^2J_{pp}\right\} \tag{62}$$

を得る。

ここで，(62)式における $q(t)$ に関する最大化を実行すれば，

$$\frac{\partial V_d}{\partial q}=J_x \tag{63}$$

がしたがう。さらに，(62)式に包絡面定理を適用し，整理すれば

$$\left(\frac{1}{dt}\right)E_t d\left(\frac{\partial V_d}{\partial q}\right)=-\frac{\partial V_d}{\partial x} \tag{64}$$

がしたがう。しかるに，$U'(q)=p$，$\partial V_d/\partial q=(p-c(x))e^{-\delta t}$，$-\partial V_d/\partial x=(c'(x)q-a'(x))e^{-\delta t}$を考慮すれば，(64)式は，木材価格の変動に関して

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{dt}\right)E_t dp&=\delta(p-c(x))+c'(x)f(x)-a'(x)\\&<(\delta-f'(x))(p-c(x))+c'(x)f(x)-a'(x)=\dot{p}\end{aligned} \tag{65}$$

を導く。不等号の右辺は，上の(57)式からしたがう。(65)式は，政府の最適伐採政策の下においても，伐採費用の双一次性の仮定の下，不確定性が作用する情況における方が，木材価格の変動速度は小さいことが帰結される。

1）かかる想定は，Berck［2］（p. 107）に負う。

2）双一次性を満たす伐採費用を想定するものとして，Berck, *op. cit.*,（p. 107）, Pindyck［18］(p. 290）参照。

3）当該資源と他の財の将来における相対価格に関する情報は，需要曲線に反映されているものとする。

4）外部効果を含む最善解を志向する政府の想定は，Berck, *op. cit.*,に負う。

5）租税政策の適用に関して，Berck, *op. cit.*,(p. 116) 参照。

6）かかる想定の妥当性について，Pindyck, *op. cit.*, footnote 8 (p. 301) 参照。

7）このとき，$p(t)$は，対数線型分布にしたがう確率変数となる。例えば，Pindyck [17]，footnote 1 (p. 283) 参照。

8）$(1/dt)E_t d(\cdot)$は，微分形成作用素（differential generator）と呼ばれる。

第2節　生態的不確定性

1. 生態的不確定性

本節では，外部効果を生む森林蓄積量に対して作用する確率過程にしたがう生態的不確定性が林家の伐採計画，政府の最適伐採政策にもたらす効果を検討する。

まず，本項では，生態的不確定性が支配するところでの林家の伐採計画，次いで，政府の最適伐採政策のあり方を検討する。

前項においては，森林資源の蓄積量は，微分方程式

$$\dot{x}(t)=f(x(t))-q(t) \tag{66}$$

にしたがって変動するものと想定された。しかるに，実際には，多種の不確定要因が作用し，その蓄積量が確率過程にしたがう確率変数として規定されることの妥当性が指摘される[9]。

ここで，森林資源蓄積量は，確率微分方程式

$$dx(t)=[f(x(t))-q(t)]dt+\sigma_x(x(t))dW \tag{67}$$

にしたがって変動するものとする。ただし，$\sigma_x(x(t))$は分散要素で，$\sigma_x(x(t))>0$，$\sigma_x(0)=0$であり，W は Wiener 過程であり，$dW=\varepsilon_x(t)\sqrt{dt}$で表わされるものとする。さらに，$\varepsilon_x(t)$は，系列無相関で分散1をとる正規分布にしたがう確率変数であるものとする。したがって，(67)式は，現在の蓄積量については既知であるが，その瞬時的変化については確率的にしか特定し得ないことを示唆している。

さて，林家は，前節同様，森林蓄積量がもたらす外部効果には顧慮することなく，専ら自らの利潤の流列の割引現在価値を最大化する危険中立者であるものとする。

いま，林家は，木材の将来価格の変動に関しては確実な情報の下で完全予知し得るものとする。したがって，時点 t における営業利潤は，

$$\Pi(t)=(p(t)-c(x(t)))q(t) \tag{68}$$

で表わされる。このとき，最適状態評価関数

$$J(x)=\max_{q(\tau)} E_t\int_0^\infty \Pi(\tau)e^{-\delta(\tau-t)}d\tau \tag{69}$$

が定義される。以下で，再び，確率的動的計画法を適用することにする[10]。

しかるに，上の状態評価関数$J(x)$がすべての期間を通じて共通であるものとすれば，現在$(\tau=t)$から出発する x の時間間隔Δt 後の位置 x'に対し状態評価関数は

$$J(x)=\max_{q(t)}\left\{\Pi(t)+\left(\frac{1}{1+\delta}\right)E_t[J(x')]\right\} \tag{70}$$

と変形される。いま，過程が時間間隔Δt毎に展開していくものとすると，$\Pi(t)$は利潤フロー率となり，時間間隔Δtの間における実行利潤は$\Pi(t)\Delta t$となる。同様に，単位時間当たりの割引率δに対し，Δtの間の総割引要素は$1/(1+\delta\Delta t)$で表わされる。このとき，状態評価函数は

$$J(x)=\max_{q(t)}\left\{\Pi(t)\Delta t+\left(\frac{1}{1+\delta\Delta t}\right)E_t[J(x')]\right\} \tag{71}$$

と表現し直される。(71)式の両辺に$(1+\delta\Delta t)$を乗じ整理すれば

$$\begin{aligned}\delta\Delta tJ(x)&=\max_{q(t)}\{\Pi(t)\Delta t(1+\delta\Delta t)+E_t[J(x')-J(x)]\}\\&=\max_{q(t)}\{\Pi(t)\Delta t(1+\delta\Delta t)+E_t[\Delta J]\}\end{aligned} \tag{72}$$

を得る。ここで，両辺に$1/\Delta t$を乗じ，$\Delta t\to 0$とすれば，Bellman 方程式

$$\delta J(x)=\max_{q(t)}\left\{\Pi(t)+\left(\frac{1}{dt}\right)E_t[dJ]\right\} \tag{73}$$

がしたがう。ただし，$(1/dt)E_t[dJ]$は，$(1/\Delta t)E_t[\Delta J]$の極限値である。

いま，dJにTaylor展開を適用し，高次項を無視すれば

$$dJ=J_x dx+\frac{1}{2}J_{xx}(dx)^2 \tag{74}$$

を得る。したがって，

$$\left(\frac{1}{dt}\right)E_t[dJ]=(f(x)-q)J_x+\frac{1}{2}\sigma_x^2(x)J_{xx} \tag{75}$$

がしたがう。これをBellman 方程式((73)式)に代入すれば

$$\delta J(x)=\max_{q(t)}\left\{(p-c(x))q+(f(x)-q)J_x+\frac{1}{2}\sigma_x^2(x)J_{xx}\right\} \tag{76}$$

を得る。

ところで，伐採費用函数が蓄積量xと伐採量qに関して双一次性をもつから，Bellman 方程式は，伐採量qに関して線型となる。ここで，(76)式における最大化を実行すれば

$$p-c(x)=J_x \tag{77}$$

がしたがう。最大化は，

$$q(t)=\begin{cases}\bar{q} & \text{if } p-c(x)>J_x\\ q^*(t) & \text{if } p-c(x)=J_x\\ 0 & \text{if } p-c(x)<J_x\end{cases} \tag{78}$$

なる関係を意味する。すなわち，上段が妥当する場合は，可能な限り伐採を続けることが有利なそれであり，下段は伐採を続ければ続ける程赤字がかさむ場合であり，ゼロ伐採量が望ましい場合である。中段は，上のBellman 方程式の最大化が妥当する場合で，内点解$q^*(t)$がしたがう場合である。

このとき，木材伐採量，すなわち産出量qが市場をクリアーするならば

$$p(q)-c(x)=J_x \tag{79}$$

が満たされなければならない。しかるに，上の状態評価函数は，森林資源の外部効果を除いた消費者余剰と生産者余剰の流列の期待総額を与え，したがって，(79)式の右辺のシャドー・プライスJ_xは，林業地の蓄積の限界単位の社会的価値ないし市場価値を表わすから，レント（rent）と比定される。

また，それは，当該１単位の伐採，販売からしたがう利潤と等価となる筈である。

もし，レントJ_xが既知であれば，(79)式を

$$p(q)=J_x+c(x) \tag{80}$$

と書き改め，逆函数p^{-1}を適用すれば

$$q^*(x)=p^{-1}[J_x+c(x)] \tag{81}$$

がしたがう。レントが既知でなければ，状態評価函数$J(x)$を見つけるためには，社会的最適条件たる Bellman 方程式((76)式)に対して，$q(x)$の代りに，上の(81)式の$q^*(x)$を代入すればよい。すなわち，

$$\delta J(x)=\int_0^{q^*(x)} p(q)dq-c(x)q^*(x)+(f(x)-q^*(x))J_x+\frac{1}{2}\sigma_x^2(x)J_{xx} \tag{82}$$

がしたがう。ここで，(82)式に包絡面定理（envelope theorem）を適用すれば

$$\begin{aligned}\delta J_x=&(p-c(x)-J_x)\frac{\partial q^*(x)}{\partial x}-c'(x)q^*(x)+f'(x)J_x\\&+\sigma'_x(x)\sigma_x(x)J_{xx}+(f(x)-q^*(x))J_{xx}+\frac{1}{2}\sigma_x^2(x)J_{xxx}\end{aligned} \tag{83}$$

がしたがう。しかるに，右辺の最初のカッコ内はゼロとなるから，(83)式は

$$\delta J_x=-c'(x)q^*(x)+f'(x)J_x+\sigma'_x(x)\sigma_x(x)J_{xx}+\left(\frac{1}{dt}\right)E_t dJ_x \tag{84}$$

と書き改められる。ここで，(84)式に演算子$\left(\frac{1}{dt}\right)E_t d(\cdot)$を適用すれば

$$\left(\frac{1}{dt}\right)E_t dJ_x=\left(\frac{1}{dt}\right)E_t d(p-c(x)) \tag{85}$$

を得る。

上の(84),(85)式は，

$$\frac{(1/dt)E_t d(p-c(x))}{p-c(x)}+f'(x)-\frac{c'(x)q^*(x)}{p-c(x)}=\delta-\sigma'_x(x)\sigma_x(x)\frac{J_{xx}}{J_x} \tag{86}$$

を導く。しかるに，(86)式の右辺第２項は，林家が森林蓄積量成長に関わる不確定性を除去すべく支払ってもよいと考える危険プレミアム（risk premium）を反映するそれとなる。すなわち，絶対的危険回避度（index of absolute risk aversion）$R_A(x)\equiv-J_{xx}/J_x$を想起すれば，それが危険プレミアムを反映する尺度とみなせることからしたがう。

ところで，第１節第１項における不確定性が存在しない場合の(10)式と上の(86)式を対比させれば，後者において，市場利子率δが危険プレミアム分だけ上昇することが示唆される。このことは，森林を伐採，販売せずに保蔵し続けるために必要なキャピタル・ゲイン率の期待値を分散が引上げる分散効果（variance effect）が作用していることを意味する[11)]。

次に，最善解を目指す政府の問題に目を転じよう。

政府は，林家が直面する森林蓄積量の変動に関する微分方程式((67)式)に直面し，さらに，木材の将来価格の変動について確実な予知を林家と共有するものとする。

前節同様，政府は，消費者の木材消費からの効用と外部効果とから伐採費用を減じた値，すなわち，消費者余剰と生産者余剰の和に外部効果を加算した値を社会的厚生とみなすものとする。すなわち，社会的厚生は

$$V(t)=U(q)-c(x)q+a(x) \tag{87}$$

で表わされる。さらに，政府が，林家と状態評価函数を共有するものとすれば，最適状態評価函数

$$J(x)=\max_{q(\tau)} E_t\int_t^{\infty} V(\tau)e^{-\delta(\tau-t)}d\tau \tag{88}$$

が定義される。ただし，政府と林家の期待値オペレータ E_t は共通なものとなる。

上と同様の手続きを適用すれば，$U'(q)=p$ がしたがい，Bellman 方程式

$$\delta J(x)=\max_{q}\left\{[(p-c(x))q+a(x)]+(f(x)-q)J_x+\frac{1}{2}\sigma_x^2(x)J_{xx}\right\} \tag{89}$$

を得る。ここで，q に関する最大化を実行すれば

$$p-c(x)=J_x \tag{90}$$

がしたがう。

伐採費用の双一次性の仮定の下で，内点解 $q^*(t)$ は，

$$p-c(x)=J_x \tag{91}$$

が満たされるときに限って実現することは，上と同様である。ここで，木材市場がクリアーされるならば

$$p(q)-c(x)=J_x \tag{92}$$

がしたがわなければならず，まず，J_x が既知であれば，逆函数を用いて，直ちに

$$q^+(x)=p^{-1}[J_x+c(x)] \tag{93}$$

がしたがう。次に，J_x が既知ではないならば，上と同様の手続きにしたがい Bellman 方程式(⒆式)に $q^+(x)$ を代入し

$$\delta J(x)=\int_0^{q^+(x)}p(q)dq-c(x)q^+(x)+a(x)+(f(x)-q^+(x))J_x+\frac{1}{2}\sigma_x^2(x)J_{xx} \tag{94}$$

を導き，包絡面定理を適用し

$$\begin{aligned}\delta J_x=&(p-c(x))-J_x)\frac{\partial q^+(x)}{\partial x}+a'(x)-c'(x)q^+(x)+f'(x)J_x\\&+\sigma'_x(x)\sigma_x(x)J_{xx}+(f(x)-q^+(x))J_{xx}+\frac{1}{2}\sigma_x^2(x)J_{xxx}\end{aligned} \tag{95}$$

を導けば，右辺第１項のカッコ内がゼロとなるから，

$$\delta J_x=a'(x)-c'(x)q^+(x)+f'(x)J_x+\sigma'_x(x)\sigma_x(x)J_{xx}+(f(x)-q^+(x))J_{xx}+\frac{1}{2}\sigma_x^2(x)J_{xxx} \tag{96}$$

がしたがう。上と同様に，演算子$(1/dt)E_td(\cdot)$を適用すれば，(96)式は

$$\frac{(1/dt)E_td(p-c(x))}{p-c(x)}+f'(x)+\frac{a'(x)-c'(x)q^+(x)}{p-c(x)}=\delta-\sigma'_x(x)\sigma_x(x)\frac{J_{xx}}{J_x} \tag{97}$$

と変形される。しかるに，$a'(x)>0$であるから，森林蓄積量に不確定性が作用するところで，市場利子率が上昇する危険プレミアム分が，外部効果を酌量する政府の最適伐採政策の下で，それを酌量しない林家のそれより小さいことが帰結される。

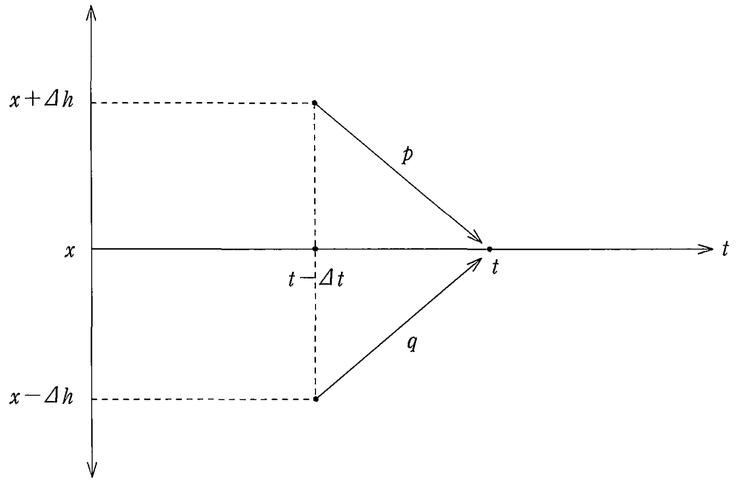

図-3

2. 定常状態均衡

本項では，森林蓄積量に対して確率過程にしたがう生態的不確定性が作用するところでの定常状態均衡のあり方を検討する。

不確定性の作用を受けない情況下では，定常状態均衡は，$\dot{p}=\dot{x}=0$，すなわち価格変化率と蓄積変化率がともにゼロとなる状態として特定することができた。しかるに，蓄積量が確率的に成長するところでは，定常状態均衡は，確率分布や積率（moments）のタームでしか特定し得ない。かかる情況下においても，時間からも初期条件からも独立で，さらに確率過程が収束していく点に対する一意の確率分布が存在し得る。

そこでの問題は，蓄積量 $x(t)$ が確率過程にしたがい，現在値が x_0 であるとき，以後の t 時点において $x(t)$ がある特定の範囲に収まる確率はどれ程であるか，あるいは，$t \leq T$ なるある t 時点以内に，$x(t)$ がある到達点 $\bar{x}$ に至る確率はどれ程であるか，を問う形をとる。かかる問いに答えるためには，蓄積量 $x(t)$ に関する確率分布とその時間的変動が規定されなければならない。このためには，Kolmogorov 方程式（Kolmogorov equation）の前進方程式（forward equation）の利用が有益である。

ここで，離散型ランダム・ウォークの例を用いて Brown 運動の簡単なケースについて前進方程式の意義をみてみよう[12)]。

いま，蓄積量 $x(t)$ が Brown 運動にしたがうとき，確率微分方程式

$$dx=\mu dt+\sigma_x dW \tag{98}$$

がしたがう。μ はずれ係数（drift coefficient）で平均値を，σ_x は拡散係数（diffusion coefficient）で分散要素を表わし，dW は，Wiener 過程の増分である。

ここで，時間間隔 t を $n=t/\Delta t$ 個の離散型ステップに分割し，各ステップにおいて確率 p で Δh だけ増加するか，確率 $q=1-p$ で Δh だけ減少するかの 2 通りの変動を想定する。（図-3参照。）

さて，$\Delta x=x_1-x_0$ のチラバリが，$p, q, \Delta h, \Delta t$ から独立で不変となる，すなわち，Δx が Δt の選定のあり方に左右されない例として $\Delta h=\sigma_x\sqrt{\Delta t}$ を選定しよう。

いま，$p=\frac{1}{2}(1+\frac{\mu}{\sigma_x}\sqrt{\Delta t})$，$q=1-p=\frac{1}{2}(1-\frac{\mu}{\sigma_x}\sqrt{\Delta t})$と設定すると

$$p-q=\frac{\mu}{\sigma_x}\sqrt{\Delta t}=\frac{\mu}{\sigma_x^2}\Delta h \tag{99}$$

$$\text{or}\quad \Delta h=\sigma_x\sqrt{\Delta t} \tag{100}$$

がしたがう。したがって，上のp, qの設定は，$\Delta h=\sigma_x\sqrt{\Delta t}$を導く要件を満たす。$\Delta x=x_1-x_0$の平均値，分散は

$$E[\Delta x]=(p-q)\Delta h \tag{101}$$

$$E[(\Delta x)^2]=p(\Delta h)^2+q(-\Delta h)^2=(p+q)(\Delta h)^2=(\Delta h)^2 \tag{102}$$

で表わされる。これらに，上の$p-q$，Δhの表現((99)，(100)式)を代入し，$\Delta t\to 0$とすれば

$$t\frac{\mu}{\sigma_x^2}\Delta h\frac{\Delta h}{\Delta t}=\mu t \tag{103}$$

$$t\left(1-\left(\frac{\mu}{\sigma_x}\right)^2\Delta t\right)\frac{\sigma_x^2\Delta t}{\Delta t}\to\sigma_x^2 t \tag{104}$$

がしたがう。すなわち，$\Delta t\to 0$なる極限において，μ, σ_x^2がそれぞれ上のBrown運動のずれ係数，拡散係数を与えることになり，$\Delta x=x_1-x_0$は，$\Delta h, \Delta t$から独立となる。

上のp, qに関する設定の下で，時点tにおける蓄積量がある区間$[a, b]$に収まる確率は，

$$\mathrm{Prob}\{a\leq x(t)\leq b\}=\int_a^b\phi(x, t)dx=\pi(x, t) \tag{105}$$

で表わされる。しかるに，上でみたごとく，$t-\Delta t$からtまでの時間間隔を通じて過程は$x-\Delta h$からxにpの確率で増加するか，$x+\Delta h$からxまでqの確率で減少するかのどちらかである。したがって，確率分布$\pi(x, t)$が定常的（stationary）であることは，

$$\pi(x, t)=p\pi(x-\Delta h, t-\Delta t)+q\pi(x+\Delta h, t-\Delta t) \tag{106}$$

が満たされることを意味する。

いま，$\pi(x-\Delta h, t-\Delta t)$を$\pi(x, t)$の周りにTaylor展開し，高次項を無視すれば

$$\pi(x-\Delta h, t-\Delta t)=\pi(x, t)-\Delta t\frac{\partial\pi}{\partial t}-\Delta h\frac{\partial\pi}{\partial x}+\frac{1}{2}(\Delta h)^2\frac{\partial^2\pi}{\partial x^2} \tag{107}$$

がしたがう。同様の手続を$\pi(x+\Delta t, t-\Delta t)$に適用すれば

$$\pi(x+\Delta h, t-\Delta t)=\pi(x, t)-\Delta t\frac{\partial\pi}{\partial t}+\Delta h\frac{\partial\pi}{\partial x}+\frac{1}{2}(\Delta h)^2\frac{\partial^2\pi}{\partial x^2} \tag{108}$$

がしたがう。ここで，(107)，(108)式を(106)式に代入すれば

$$\pi(x, t)=(p+q)\pi(x, t)-(p-q)\Delta t\frac{\partial\pi}{\partial t}-(p-q)\Delta h\frac{\partial\pi}{\partial x}+\frac{1}{2}(p+q)(\Delta h)^2\frac{\partial^2\pi}{\partial x^2} \tag{109}$$

がしたがう。しかるに，$p+q=1$，$p-q=(\mu/\sigma_x)\sqrt{\Delta t}$，さらに，$\Delta h=\sigma_x\sqrt{\Delta t}$を想起し，両辺に$(1/\Delta t)$を乗ずれば

$$\frac{1}{2}\sigma_x^2\frac{\partial_2}{\partial x^2}\pi(x, t)-\mu\frac{\partial}{\partial x}\pi(x, t)=\frac{\partial}{\partial t}\pi(x, t) \tag{110}$$

を得る。(110)式は，ずれ項をもつBrown運動に関するKolmogorov前進方程式と呼ばれ，確率密度函数$\pi(x, t)$の時間を通じた変動を表わしている。

上のKolmogorov前進方程式は偏微分方程式であり，一般に解くのは容易ではない。しかるに，

長期的定常状態（long-run steady-state）の特性が得られればそれでよい。それでも，すべての確率過程が何らかの定常状態密度函数に収束する確率分布をもつとは限らず，幾何 Brown 運動はもち得ず，Orstein＝Uhlenbeck 過程はもち得るといったごとくであるが，もし，かかる定常状態密度函数が存在すれば，常微分方程式に帰着する Kolmogorov 前進方程式を用いることによってそれを見出し得る可能性がある。

さて，上の前進方程式(110式)を用いて，長期的定常 Brown 運動の分布を求めてみよう。

いま，長期的定常状態において，(110)式の右辺はゼロとなり，分布は現時点 t からも独立となるから，$\pi(x, t)=\pi(x)$ と書き改められる。このとき，前進方程式は常微分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma_x^2\pi''(x)-\mu\pi'(x)=0 \tag{111}$$

で表わされる。(111)式を満たす定常状態密度函数を$\pi_\infty(x)$で表わそう。

ここで，最適伐採量 $\hat{q}(x)$が与えられたとき，そこでの定常状態密度函数$\pi_\infty(x)$を求めることにする[13)]。

最適伐採量 $\hat{q}(x)$に対して，確率微分方程式は

$$dx=(f(x)-\hat{q}(x))dt+\sigma_x(x)dW \tag{112}$$

と表わされる。このとき，前進方程式は

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx^2}[\sigma_x^2(x)\pi_\infty(x)]-(f(x)-\hat{q}(x))\frac{d}{dx}\pi_\infty(x)=0 \tag{113}$$

で与えられる。(113)式に積分を施せば

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}[\sigma_x^2(x)\pi_\infty(x)]-(f(x)-\hat{q}(x))\pi_\infty(x)=0 \tag{114}$$

$$\text{or}\quad d[\sigma_x^2(x)\pi_\infty(x)]-2(f(x)-\hat{q}(x))\pi_\infty(x)dx=0 \tag{115}$$

を得る。(115)式の両辺を$\sigma_x^2(x)\pi_\infty(x)$で除せば

$$\frac{d[\sigma_x^2(x)\pi_\infty(x)]}{\sigma_x^2(x)\pi_\infty(x)}=\frac{2}{\sigma_x^2(x)}(f(x)-\hat{q}(x))dx \tag{116}$$

がしたがう。しかるに，(116)式は，さらに，

$$\frac{d[e^{\sigma_x^2(x)\pi_\infty(x)}]}{dx}=\frac{2}{\sigma_x^2(x)}(f(x)-\hat{q}(x))dx \tag{117}$$

と変形され，両辺の積分から

$$e^{\sigma_x^2(x)\pi_\infty(x)}=m\int^x\frac{f(\nu)-\hat{q}(\nu)}{\sigma_x^2(\nu)}d\nu \tag{118}$$

がしたがう。ただし，m は$\int_0^\infty\pi_\infty(x)dx=1$が満たされるべく選択される積分定数である。ここで，(118)式の両辺の対数をとり，整理すれば

$$\pi_\infty(x)=\frac{m}{\sigma_x^2(x)}\exp[2\int^x\frac{f(\nu)-\hat{q}(\nu)}{\sigma_x^2(\nu)}d\nu] \tag{119}$$

を得る。

しかるに，上で導かれた定常状態密度函数$\pi_\infty(x)$が，さらに特定化され，積分定数 m が決定されるためには，成長函数$f(x)$が特定化されなければならない。いま，ここで，成長函数がロジスティック函数（logistic function）にしたがう，すなわち，

$$f(x)=\mu x(1-x/X) \tag{120}$$

がしたがうものとしよう[14]。ただし，X は，扶養力である。さらに，$\sigma_x(x)=\sigma_x$ と特定化しよう。

(120)式において，伐採されない，すなわち $\hat{q}(x)=0$ のとき，(119)式の［　］内は，$2\mu/\sigma_x^2$ に帰着する。$\pi_\infty(x)$ の分布が退化しないためには，$\sigma_x^2<2\mu$ がしたがわなければならない。いま，定常状態密度函数をガンマ函数で特定化すれば，

$$\pi_\infty(x)=(2\mu/\sigma_x^2X)^{2\mu/\sigma_x^2-1}\cdot x^{2\mu/\sigma_x^2-2}\cdot e^{2\mu x/\sigma_x^2}/\Gamma(2\mu/\sigma_x^2-1) \tag{121}$$

で表わされる。ここで，$\Gamma(\cdot)$ はガンマ函数で，確率変数 x に対して

$$\pi(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x} & \text{for} \quad x>0\\ 0 & \text{for} \quad x\leq 0\end{cases} \tag{122}$$

で定義され，期待値は，$E(x)=\alpha/\beta$ で与えられる。

上の(121)式において，$\alpha=2\mu/\sigma_x^2-1, \beta=2\mu/\sigma_x^2X$ となるから，定常状態均衡における蓄積量 x の期待値は

$$E(x_\infty)=\frac{(2\mu-\sigma_x^2)\sigma_x^2}{2\mu\sigma_x^2}X=\left(1-\frac{\sigma_x^2}{2\mu}\right)X \tag{123}$$

で与えられる。

(123)式から，蓄積量の確率的変動(σ_x^2)が大きければ定常状態均衡期待値 $E(x_\infty)$ は小さくなり，さらに，$\sigma_x^2\to2\mu$ となるとき，$E(x_\infty)\to0$ となる。また，$\sigma_x^2>2\mu$ であれば，確率的変動にドライヴがかかり，蓄積量は枯渇化に向かう，すなわち，確率1で $x(t)\to0$ となることが帰結される[15]。

9）Pindyck [18]（p. 292）参照。

10）以下の林家の最適化の手続きは，Pindyck [18] に負う。

11）Pindyck [18]（p. 294）参照。

12）以下の単純化例における Kolmogorov 前進方程式の導出の手続きは，Dixit＝Pindyck [5]（Chap. 3）に負う。

13）以下の手続きは，Merton [13]（Appendix B (pp. 389-91)）に負う。

14）ロジステック函数への特定化は，Pindyck [18] に負う。そこでは，さらに Gompertz 函数 $f(x)=\mu x\log(X/x)$ への特定化が試みられている。

15）林家，政府の最適産出量 $q^*(x), q^+(x)$ が特定されれば，それぞれの密度函数 $\pi_\infty(x^*)$，$\pi_\infty(x^+)$ が特定される。しかるに，$q^*(x), q^+(x)$ の特定は，それぞれ微分方程式((82)式)，((94)式)を解くことを意味し，需要函数，費用函数，さらには外部効果の特定化が必要とされる。

結びにかえて

先住ケルト人（Celt）の最高神である森の神ドルイド（Druid）を大陸から放逐すべくキリスト教徒がとった戦略は，森林伐採のそれであった。大陸は，忽ち，まる裸となる。やがて，裸地は，新農具を携えた流入キリスト教徒によって農地化され，後代の農業隆盛の土壌となる。

近世に入り，とりわけドイツでは，諸事情に圧されて植林が促されてくる。植林は，伐採と裏表の関係に立ち，伐採(収穫)のタイミング，再植林の規模を計る森林管理の概念を培う。森林管理の

概念は，投資タイミング，償還の規模とタイミングを計る資本管理のそれと同義である。ドイツから発し，スウェーデンで火勢を増した森林の収穫原理をめぐる論争は，20世紀に入ってからのスウェーデンの資本理論の深化に大いに寄与するところとなる。

1970年代から80年代初頭にかけて，森林資源に関する関心が高揚されたごとくである。生物･生態学の側の関心は，様々な不確定要因の交錯からしたがう森林蓄積量の不確定性，すなわち，生態的不確定性にあった。他方，経済学の側のそれは，相変わらず収穫原理をめぐるそれに留まり，生態的不確定性に注目を及ぼす研究例は，極く僅かであった。また，森林伐採と環境保全との連鎖に対する認識も，未だ発育不良の状態にあり，したがって，森林資源の外部効果に対する認識もまた，発育不良同然であった。

本稿では，以上にかんがみ，1970年代の時間視野に立ち，生態的不確定性が作用する中，森林の外部効果がもたらす影響を最善解を求める政府の立場から検討した。

不確定性が一切作用しない情況の下で，外部効果に顧慮しない林家のみから成る市場のパフォーマンスと政府介入の下でのそれとの比較から，外部効果への配慮は，伐採量を低下させ，木材市場価格を上昇させる効果が確かめられた。しかしながら，不確定性が作用するところでは，その種類の別なく，外部効果への配慮の有無に関わらず，木材市場価格の変動速度が不確定性の作用によって緩和されることが結論された。

現代の時間視野に立戻り，我々の議論に環境保全の側面を導入することは，興味深い発展化の方向であろう。

References

[1] J. R. Beddington and R. M. May, "Harvesting Natural Populations in a Randomly Fluctuating Environment," *Science*, 197, 1977.

[2] P. Berck, "Optimal Management of Renewable Resources with Growing Demand and Stock Externalities," *Journal of Environmental Economics and Management*, 8, 1981.

[3] C. Clark and G. M. Munroe, "Economics of Fishing and Modern Capital Theory," *Journal of Environmental Economics and Management*, 2, 1975.

[4] P. Dasgupta, *The Control of Resources*, Basil Blackwell, 1982.

[5] A. K. Dixit and R. S. Pindyck, *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994.

[6] A. Gleit, "Optimal Harvesting in Continuous Time with Stochastic Growth," *Mathematical Biosciences*, 41, 1978.

[7] R. Hartman, "The Harvesting Decision When a Standing Forest Has Value," *Economic Inquiry*, 14, 1976.

[8] T. Heaps, "The Forestry Maximum Principle," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 7, 1984.

[9] D. Ludwig, "Optimal Harvesting of a Randomly Fluctuating Resources. 1: Application of Perturbation Methods," *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 37, 1979.

[10] ________, and J. M. Varah, "Optimal Harvesting of a Randomly Fluctuating Resources. II: Numerical Methods and Results," *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 37, 1979.

[11] R. Lusky, "Consumers' Preferences and Ecological Consciousness," *International Economic Review*, 16, 1975.

[12] R. M. May, J. R. Beddington, J. W. Horwood and J. G. Shepherd, "Exploitating Natural Populations in a Uncertain World," *Mathematical Biosciences*, 42, 1978.

[13] R. C. Merton, "An Asymptotic Theory of Growth under Uncertainty," *Review of Economic Studies*, 42, 1975.

[14] T. Mitra and H. Y. Wan, Jr., "On the Faustmann Solution to the Forest Management Problem," *Journal of Economic Theory*, 40, 1986.

[15] R. Morck, E. Schwartz and D. Stangeland, "The Valuation of Forestry Resources under Stochastic Prices and Inventories," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24, 1989.

[16] A. Mourmouras, "Conservationist Government Policies and Intergenerational Equity in a Overlapping Generations Model with Renewable Resources," *Journal of Public Economics*, 51, 1993.

[17] R. S. Pindyck, "The Optimal Production of an Exhaustible Resource When Price Is Exogenous and Stochastic," *Scandinavian Journal of Economics*, 83, 1981.

[18] ________, "Uncertainty in the Theory of Renewable Resources Markets," *Review of Economic Studies*, 51, 1984.

[19] W. J. Reed, "The Steady State of a Stochastic Harvesting Model," *Mathematical Biosciences*, 41, 1979.

[20] P. A. Samuelson, "Economics of Forestry in a Evolving Society," *Economic Inquiry*, 14, 1976.

[21] H. C. Tuckwell, "A Study of Some Diffusion Models of Population Growth," *Theoretical Population Biology*, 5, 1994.

[22] N. Vousden, "Basic Theoretical Issues of Resource Depletion," *Journal of Economic Theory*, 6, 1973.